Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales
E.T.S.I. de MONTES - U.P.M
PRIMER EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL **10 de febrero de 2003**

Problema 1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (y + z,\ x + y + 4z,\ 2y + z),$$

y sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal determinada por

$$\begin{gathered} S(1, -1, 2) = (-5, -4, 6) \\ S(1, 2, 0) = (3, 5, 3) \\ S(0, -1, 1) = (-3, -3, 2). \end{gathered}$$

Se considera también el conjunto W de $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\vec{v}) = S(\vec{v})\}.$$

a) **(3 Ptos.)** Prueba que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
b) **(7 Ptos.)** Determina explícitamente los elementos de W.

Problema 2. Obtén la matriz, respecto de la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$, de una aplicación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $T^2 = T \circ T \equiv 0$ e Im $T = \mathcal{L}\{x^2 + x^3, x^2 - x^3\}$.

Problema 3. Una compañía minera produce dos tipos de carbón: lignito y antracita. El beneficio que se obtiene por tonelada de lignito vendida es de 4 unidades monetarias (u.m.), y por tonelada de antracita vendida es de 3 u.m. El proceso de cada tonelada de lignito requiere 3 horas de trabajo en una máquina de cortar carbón y otras 4 hora en otra de lavado. Para la antracita se requieren en cada fase 4 y 2 h., respectivamente. En total las horas diarias disponibles en las máquinas de cortado son 35 y en las máquinas de lavado son 30 h. Se supone que como mínimo se deben producir diariamente 4 Tm de carbón. Además, la compañía es capaz de vender todo el carbón producido. Plantea un modelo de programación lineal con el fin de hacer máximo el beneficio de la compañía minera y resuélvelo.

Si la ganancia por tonelada de lignito fluctuara enter 2 y 5 u.m. y por tonelada de antracita variara entre 1 y 4 u.m., estudia la variación de la producción que maximiza el beneficio.

Problema 4. (1) Sea el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

Demuestra que es *compatible indeterminado* si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.
(2) Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius.
(3) Para cada apartado, construir si es posible un sistema de ecuaciones lineales:
a) con dos incógnitas, cuya única solución sea $(1, 1)$;
b) con dos incógnitas, cuyas dos únicas soluciones sean $(1, 2)$ y $(-1, -2)$;
c) con tres incógnitas que tenga entre sus soluciones a $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.
(4) Para cada apartado, razona si es invertible la matriz A, y en caso afirmativo calcula A^{-1};

$$\text{(i)}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

(5) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $\det(A) = 2$. ¿Cuánto vale $\det(4.A)$?

- Cada ejercicio debe responders en hojas separadas.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.